Fonctions harmoniques

Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.
On note $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ définies sur U.
Une fonction $f:U\to\mathbb{R}$ est dite harmonique ssi celle-ci est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution sur U de l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. On note $H(U)$ l'ensemble de ces fonctions.

Partie I-Généralités

1. Montrer que $H(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$.
2. Premiers exemples

2.a Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $a,b,c\in\mathbb{R}$ pour que l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=ax^2+bxy+cy^2$ soit harmonique sur $\mathbb{R}^2$.

2.b Montrer que $f:(x,y)\mapsto \arctan\left(y/x\right)$ est harmonique sur $U=\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$.

3. Soit $f:U\to\mathbb{R}$.

3.a Montrer que si f est harmonique et de classe $\mathcal{C}^3$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont, elles aussi, harmoniques.

3.b En déduire que si f est harmonique de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ (avec $n\in\mathbb{N}$), alors ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n sont harmoniques.

4. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$.

4.a Montrer g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

4.b Etablir que si f est harmonique alors $\forall(r,\theta)\in\mathrm{R}^2, r^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=0$

Partie II – Exemples de fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2$

Les questions 1,2 et 3 sont indépendantes.

1. *Fonctions harmoniques à variables séparables*
Une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est dite à variables séparables ssi il existe deux fonctions $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :
$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=\varphi(x)\psi(y)$.

1.a On considère f une fonction harmonique non nulle de la forme ci-dessus.
Montrer qu'il existe $k\in\mathrm{R}$ telle que φ et ψ soit respectivement solutions des équations différentielles :
$E_k : z''(t)+k.z(t)=0$ et $E_{-k} : z''(t)-k.z(t)=0$.

1.b Résoudre, selon le signe de $k\in\mathbb{R}$, l'équation E_k.

1.c On exige de plus que $f(0,0)=1$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.
Donner, en fonction k, l'expression de $f(x,y)$.

2. *Fonctions harmoniques radiales*
Une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est dite radiale ssi il existe $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :
$\forall x,y\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=g(x^2+y^2)$.

2.a On considère f une fonction harmonique de la forme ci-dessus.
Montrer que g est solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle $tz''(t)+z'(t)=0$.

2.b Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2.c Quelles sont les fonctions harmoniques sur $\mathbb{R}^2$ radiales ?

3. *Fonctions harmoniques à variables polaires séparables*
Une fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est dite à variables polaires séparables ssi il existe deux fonctions $u:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ et $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :
$\forall(r,\theta)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}, f(r\cos\theta,r\sin\theta)=u(r)v(\theta)$.

3.a On considère f une fonction non nulle de la forme ci-dessus.
Montrer que l'application v est 2π périodique.

3.b On suppose de plus que f est harmonique.
En exploitant I.4.b, établir l'existence d'une constante $k\in\mathbb{R}$ telle que :
u est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle $E_r : r^2z''(r)+rz'(r)-kz(r)=0$
et v solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $F_\theta : z''(\theta)+kz(\theta)=0$.

3.c On suppose dans cette question que $k=0$.
Résoudre F_θ sur $\mathbb{R}$. Quelles sont les solutions 2π périodiques ?
Résoudre E_r sur $\mathbb{R}^{+*}$. Quelles sont les solutions se prolongeant pas continuité en 0 ?

3.d On suppose désormais $k\neq 0$.
Etablir une condition nécessaire et suffisante sur $k\in\mathbb{R}^*$ pour que l'équation F_θ possède une solution 2π périodique non nulle.
On suppose désormais que cette condition est remplie et on pose $n=\sqrt{k}$.

3.e Résoudre F_θ.

3.f Résoudre E_r sur E^{+*} en réalisant le changement de variable $r=\mathrm{e}^t$.
Parmi les solutions, lesquelles peuvent être prolongées par continuité en 0 ?

Partie III – Propriétés de la moyenne et principe du maximum

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction harmonique.

1.a Justifier qu'il existe une fonction $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que :
$\dfrac{\partial g}{\partial x}=-\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

1.b Montrer que g est harmonique.

2. Soit $a=(x_0,y_0)\in U$ et $R>0$. On note $D(a,r)$ le disque de centre a et de rayon R.
On définit deux applications $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ par :
$\forall r\in\mathbb{R},\forall\theta\in\mathbb{R},\tilde{f}(r,\theta)=f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)$ et $\tilde{g}(r,\theta)=g(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)$.

2.a Justifier que $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2.b Etablir que $r\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)=\dfrac{\partial\tilde{g}}{\partial\theta}(r,\theta)$ pour tout $(r,\theta)\in\mathbb{R}$.

3. Pour tout $r\in\mathbb{R}$ on pose $\varphi(r)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\tilde{f}(r,\theta)\mathrm{d}\theta$.

On admet que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi'(r)=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)\mathrm{d}\theta$.

3.a Montrer que φ est une fonction constante et préciser sa valeur.

3.b En déduire que $f(a)=\dfrac{1}{\pi R^2}\displaystyle\iint_{D(a,R)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
Ainsi la valeur de f en a est égale à la moyenne de f sur tout disque de centre a.

4. On suppose que f admet un extremum en a.
Montrer que f est alors constante sur $\mathbb{R}^2$.
Ce résultat est connu sous le nom de principe du maximum.

Correction

Partie I

1. $H(U)\subset\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$.
La fonction nulle de U vers $\mathbb{R}$ est harmonique.
Soit $f,g\in H(U),\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. $\lambda f+\mu g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et :
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\lambda f+\mu g)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\lambda f+\mu g)=\lambda(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2})+\mu(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2})=0$$
$\lambda f+\mu g$ est donc harmonique. $H(U)$ est un sous-espace vectoriel.

2.a La condition nécessaire et suffisante cherchée est $a+c=0$.

2.b f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$.
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)}\text{ et }\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)}\text{ d'où }\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

3.a $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=0$. De même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3.b Etablissons la propriété par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}$.
Pour $n=0$: ok.
Supposons la propriété établie jusqu'au rang $n\geq 0$.
Si f est une fonction harmonique de classe $\mathcal{C}^{n+3}$ alors
f est une fonction harmonique de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ et par HR ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n sont déjà harmoniques.
Les dérivées partielles d'ordre $n+1$ de f correspondent aux dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre n de f. Or ces dernières sont harmoniques et de classe $\mathcal{C}^3$, donc, par 3.a, leurs dérivées partielles sont elles aussi harmoniques. Récurrence établie.

4.a L'application $(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{R}$.
Par composition d'applications $(r,\theta)\mapsto g(r,\theta)$ l'est aussi.

4.b On a $g(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ donc
$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}()+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}()$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}()+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}()+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}()$$
$$\frac{\partial g}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}()+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}()$$
$$\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)=r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}()+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}()-2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}()-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}()-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}()$$
Donc $r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)+\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)+r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=r^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}()+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}()\right)=0$

Partie II

1.a $\forall(x,y)\in\mathrm{R}^2,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\varphi''(x)\psi(y)+\varphi(x)\psi''(y)=0$ (1)

Comme f est supposée non nulle, $\exists(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(x_0,y_0)\neq 0$ et donc $\varphi(x_0)\neq 0$ et $\psi(y_0)\neq 0$.
Posons $k=\psi''(y_0)/\psi(y_0)$.
Par la relation 1, en prenant $y=y_0$: $\forall x\in\mathbb{R},\varphi''(x)+k\varphi(x)=0$.

En injectant ce ceci dans 1 : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, -k\varphi(x)\psi(y)+\varphi(x)\psi''(y)=0$

En prenant $x=x_0$ et en simplifiant : $\forall y\in\mathbb{R}, \psi''(y)-k\psi(y)=0$.

1.b La solution générale de E_k est :

Si $k=0$: $z(t)=\lambda.t+\mu$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$

Si $k>0$: $z(t)=\lambda\cos(\omega t)+\mu\sin(\omega t)$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $\omega=\sqrt{k}$.

Si $k<0$: $z(t)=\lambda\,\mathrm{ch}(\omega t)+\mu\,\mathrm{sh}(\omega t)$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $\omega=\sqrt{-k}$.

1.c Si $k=0$ alors $f(x,y)=(\lambda x+\mu)(\lambda' y+\mu')$.

Pour vérifier les conditions imposées il faut $\mu\mu'=1, \lambda=\lambda'=0$ ce qui donne $f(x,y)=1$.

Si $k>0$ alors $f(x,y)=(\lambda\cos(\omega x)+\mu\sin(\omega x))(\lambda'\mathrm{ch}(\omega y)+\mu'\mathrm{sh}(\omega y))$.

Pour vérifier les conditions imposées il faut $\lambda\lambda'=1, \mu=\mu'=0$ ce qui donne $f(x,y)=\cos(\omega x)\mathrm{ch}(\omega y)$.

Si $k<0$, par une même démarche : $f(x,y)=\mathrm{ch}(\omega x)\cos(\omega y)$.

2.a $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=4g'(x^2+y^2)+4(x^2+y^2)g''(x^2+y^2)=0$.

Tout $t\in\mathbb{R}^+$ pouvant s'écrire $t=x^2+y^2$, la fonction $t\mapsto g(t)$ est solution de l'équation différentielle $tz''(t)+z'(t)=0$.

2.b La solution générale sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $tz'(t)+z(t)=0$ est $z(t)=C/t$.

La solution générale sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $tz''(t)+z'(t)=0$ est $z(t)=C\ln t+D$.

2.c Parmi les solutions précédentes les seules qui puissent se prolonger par continuité en 0 sont $z(t)=D$.

Ainsi les seules fonctions à la fois harmoniques et radiales sont les fonctions constantes.

3.a Soit $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tel que $f(x_0,y_0)\neq 0$ et soit (r_0,θ_0) un représentant polaire du couple (x_0,y_0). On a $u(r_0)\neq 0$ et $v(\theta_0)\neq 0$.

Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$: $u(r_0)v(\theta+2\pi)=f(r_0\cos\theta, r_0\sin\theta)=u(r_0)v(\theta)$ donc $v(\theta+2\pi)=v(\theta)$. Ainsi v est 2π périodique.

3.b En reprenant les notations du I.4.b : $\forall r>0, \forall\theta\in\mathbb{R}$: $g(r,\theta)=u(r)v(\theta)$,

$\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=u'(r)v(\theta), \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)=u''(r)v(\theta), \dfrac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta)=u(r)v''(\theta)$ donc

$r^2u''(r)v(\theta)+ru'(r)v(\theta)+u(r)v''(\theta)=0$ (2)

En évaluant (2) en $\theta=\theta_0$ et en prenant $k=-v''(\theta_0)/v(\theta_0)$ on a :

$\forall r>0, r^2u''(r)+ru'(r)-ku(r)=0$.

De plus en substituant ceci dans (2) :

$\forall r>0, \forall\theta\in\mathbb{R}, ku(r)v(\theta)+u(r)v''(\theta)=0$ (3)

En évaluant (3) en $r=r_0$ puis en simplifiant :

$\forall\theta\in\mathbb{R}, v''(\theta)+kv(\theta)=0$.

3.c La solution générale de F_θ est $z(\theta)=\lambda\theta+\mu$.

Seules les fonctions constantes $z(\theta)=\mu$ sont 2π périodiques.

La solution générale de E_r est $z(r)=C\ln r+D$ (comme en 3.b)

Seules les solutions constantes se prolongent par continuité en 0.

3.d Si $k<0$ alors F_θ ne possède pas de solutions 2π périodiques non nulles.

Si $k>0$ alors la solution générale de F_θ est $z(\theta)=\lambda\cos(\omega\theta)+\mu\sin(\omega\theta)$ avec $\omega=\sqrt{k}$.

$z(\theta+2\pi)=\lambda'\cos(\omega\theta)+\mu'\sin(\omega\theta)$

avec $\begin{cases}\lambda'=\lambda\cos(2\pi\omega)+\mu\sin(2\pi\omega)\\ \mu'=-\lambda\sin(2\pi\omega)+\mu\cos(2\pi\omega)\end{cases}$

$\forall\theta\in\mathbb{R}, z(\theta+2\pi)=z(\theta)\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda(\cos(2\pi\omega)-1)+\mu\sin(2\pi\omega)=0\\ -\lambda\sin(2\pi\omega)+\mu(\cos(2\pi\omega)-1)=0\end{cases}$.

Il existe une solution non nulle à F_θ ssi ce système n'est pas de Cramer i.e. ssi
$(\cos(2\pi\omega)-1)^2+\sin^2(2\pi\omega)=0$ soit $\omega\in\mathbb{N}$.
Ainsi la condition nécessaire et suffisante cherchée est $k>0$ et $\sqrt{k}\in\mathbb{N}$.

3.e La solution générale de F_θ est $z(\theta)=\lambda\cos(n\theta)+\mu\sin(n\theta)$.

3.f Soit $r\mapsto z(r)$ une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
Soit $w:t\mapsto u(t)=z(\mathrm{e}^t)$, w est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
z est solution de E_r ssi w est solution de $w''(t)-kw(t)=0$.
La solution générale en w est : $w(t)=\lambda e^{nt}+\mu e^{-nt}$
La solution générale en z est : $z(r)=\lambda r^n+\mu r^{-n}$.
La seule solution se prolongeant par continuité en 0 est $z(r)=\lambda r^n$.

Partie III

1.a Posons $P=-\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $Q=\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Puisque R^2 est un ouvert étoilé et que $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, l'existence de g fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est assurée par le théorème de Poincaré. Puisque ses dérivées partielles sont $\mathcal{C}^1$, g est $\mathcal{C}^2$.

1.b $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=0$ en vertu du théorème de Schwarz.

2.a $(r,\theta)\mapsto(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)$ est $\mathcal{C}^1$ et par suite $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ le sont par composition.

2.b $\dfrac{\partial\tilde{g}}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\dfrac{\partial g}{\partial x}()+r\cos\theta\dfrac{\partial g}{\partial y}()=r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}()+r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}()=r\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial r}(r,\theta)$

3.a Pour $r\neq 0$, $\varphi'(r)=\dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial\theta}(r,\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{r}\big[\tilde{g}(r,\theta)\big]_0^{2\pi}=0$.
Sachant φ' continue sur $\mathbb{R}$, $\varphi'(r)=0$ sur $\mathbb{R}$.
Finalement φ est constante égale à $\varphi(0)=\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x_0,y_0)\mathrm{d}\theta=2\pi f(a)$.

3.b $\displaystyle\iint_{D(a,r)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\pi}f(x_0+r\cos\theta,y_0+r\sin\theta)r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r=\int_{r=0}^{R}r\varphi(r)\mathrm{d}r=\pi R^2 f(a)$.

4. Quitte à considérée $-f$, supposons que f admet un minimum en a.
Pour tout $R\in\mathbb{R}^{+*}$ on a :
$\displaystyle\iint_{D(a,R)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\pi R^2 f(a)=\iint_{D(a,R)}\underbrace{(f(x,y)-f(a))}_{\geq 0}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.
Donc f est constante égale à $f(a)$ sur $D(a,R)$.
Ceci étant vrai pour tout $R>0$, f est constante.